# Utilisation de faisceaux gaussiens pour simuler la propagation en environnement complexe

Ihssan Ghannoum et Christine Letrou
Lab. SAMOVAR (UMR CNRS 5157)
Institut TELECOM SudParis
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France
Emails: ihssan.ghannoum@it-sudparis.eu
christine.letrou@it-sudparis.eu

Gilles Beauquet
Surface Radar
THALES Air Systems S.A.
Hameau de Roussigny, 91470 Limours, France
Email: gilles.beauquet@thalesgroup.com

***Résumé*—La méthode de Lancer de Faisceaux Gaussiens (LFG) est bien adaptée aux calculs de propagation dans des environnements comportant de multiples obstacles. Cette contribution illustre l'intérêt du LFG pour la simulation de la propagation radar en environnement terrestre urbanisé, en particulier en présence d'obstacles latéraux et pour la recherche des trajets multiples. La théorie des frames, qui permet de décomposer une distribution surfacique en une somme de fenêtres gaussiennes, est ici utilisée de façon intensive pour rendre compte de la diffraction par des obstacles de dimensions finies et pour surmonter le problème de l'élargissement des faisceaux.**

***Mots-clés : propagation 3D ; Lancer de Faisceaux Gaussiens (LFG) ; frame de Gabor.***

## I. Introduction

La propagation en environnement terrestre et en présence d'obstacles naturels (reliefs) ou artificiels (bâtiments) pose parfois des problèmes difficiles à résoudre avec les méthodes habituelles : problèmes de caustiques et lourdeur des calculs en 3D avec les méthodes de rayons, difficile prise en compte d'obstacles latéraux, de zones en non visibilité, et de la rétrodiffusion avec la méthode d'Equation Parabolique. La méthode de Lancer de Faisceaux Gaussiens (LFG) se présente comme une approche complémentaire des précédentes, permettant d'échapper à certaines des contraintes évoquées ci-dessus. Le LFG repose sur la représentation des champs rayonnés comme une superposition de faisceaux gaussiens. La méthode la plus rigoureuse pour obtenir une telle représentation consiste à :

1) Décomposer la distribution source (ou le champ émis par l'antenne d'émission) sur un ensemble de fenêtres gaussiennes constituant un frame, conformément à la théorie mathématique des frames.
2) Tracer les trajets des axes de faisceaux dans l'environnement.
3) Calculer les opérateurs de transformation (réflexion, transmission...) le long de ces axes indépendamment des points de calcul des champs.
4) Calculer les champs des faisceaux utiles (de champ non négligeable aux points cibles).
5) Superposer ces champs, pondérés par les coefficients de décomposition du champ source.

Le champ rayonné par une distribution gaussienne possède une "largeur" non nulle à la fois dans les domaines spatial et spectral, puisque le spectre d'une fonction gaussienne est lui-même gaussien. Cette "épaisseur" des faisceaux gaussiens confère au LFG un ensemble de propriétés intéressantes :

– Les faisceaux gaussiens ne souffrent pas de problèmes de caustiques. Cette propriété est particulièrement importante dans les cas d'interfaces courbes concaves, ou de milieux de propagation non homogènes.
– Le nombre de faisceaux à lancer est limité par rapport au nombre de rayons, pour des résultats de précision équivalente.
– La représentation discrétisée des champs sous la forme d'une superposition de faisceaux n'introduit pas de discontinuités "non physiques" car elle n'est pas basée sur un échantillonnage ou une approximation discontinue (marches d'escaliers) du spectre rayonné, comme c'est le cas avec les méthodes de lancer de rayons ou de tubes de rayons.

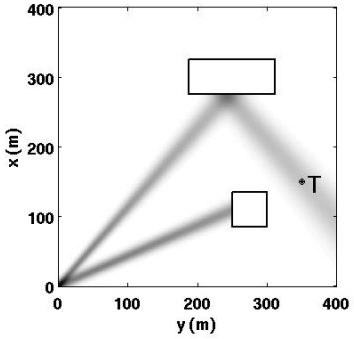


FIG. 1. *Coupe 2D pour deux faisceaux gaussiens propagés dans le plan $xOy$, lancés d'une source placée à l'origine du plan $xOz$. Un faisceau est réfléchi par un "immeuble" rectangulaire en direction de la cible "T", l'autre est bloqué par un obstacle carré (la couleur est proportionnelle à l'amplitude du champ).*

Par ailleurs, les faisceaux gaussiens peuvent être suivis et transformés comme des rayons optiques lors de réflexions/réfractions spéculaires. Des faisceaux images rendent facilement compte de réflexions multiples ; la matrice ABCD et les opérateurs de Fresnel peuvent être appliqués le long de l'axe du faisceau [1]. L'approximation dite "paraxiale" utilisée pour justifier ce traitement des faisceaux est d'autant plus précise que les faisceaux sont collimatés (i.e. de faible largeur spectrale). L'efficacité de la méthode de LFG basée simplement sur ces transformations paraxiales des faisceaux a pu être vérifiée pour des simulations 3D de propagation

en environnement multi-trajets, dans le cas de canaux de propagation intra-bâtiments en ondes millimétriques [2].

Cette méthode simple et rapide ne permet pas cependant d'obtenir des résultats de précision satisfaisante lorsque des faisceaux subissent des transformations abruptes comme dans le cas d'une incidence sur le coin d'un obstacle, ou lorsqu'une partie non négligeable de leur spectre est évanescent [3]. L'élargissement spatial des faisceaux lorqu'ils se propagent pose également un problème de validité de l'approximation paraxiale au-delà d'une certaine distance parcourue. Nous proposons la mise en oeuvre d'un algorithme que nous appelons de "re-décomposition" pour surmonter ces écueils. Grâce à cet algorithme, les champs provenant de faisceaux devenus trop larges, ou subissant des interactions inadaptées à un traitement paraxial simple, sont redécomposés sur un nouveau frame, donnant ainsi naissance à un nouvel ensemble de faisceaux paraxiaux après prise en compte des transformations éventuelles.

Après un rappel résumé de la formulation du LFG, nous

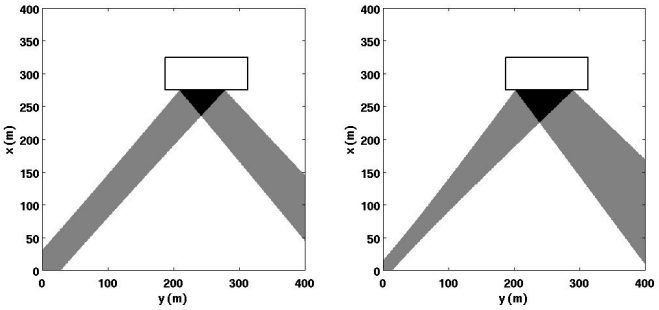


FIG. 2. *Propagation et réflexion d'un faisceau gaussien : coupe 2D pour un faisceau lancé dans le plan $xOy$ d'une source placée à l'origine du plan $xOz$ avec une largeur à l'origine du faisceau $L_0 = 21\lambda$, soit $14,7$ m à 430 MHz (gauche) et $L_0 = 10,5\lambda$, soit $7,35$ m à 430 MHz (droite). Les surfaces colorées correspondent aux régions où le champ est non négligeable.*

présenterons le principe de l'algorithme de re-décomposition et validerons sa mise en œuvre dans le cas d'une propagation radar en présence de bâtiments. On illustrera le fait que le LFG donne directement accès aux chemins suivis par les champs depuis l'antenne d'émission jusqu'à une cible éventuelle, et depuis la cible vers l'antenne de réception (rétrodiffusion), via les faisceaux successivement transformés et/ou re-décomposés.

## II. FRAME DE GABOR

Soit une composante ($U = E_x$ ou $U = E_z$) linéairement polarisée d'une distribution de champ source définie dans le plan $xOz$. Cette composante peut être décomposée sur un ensemble de fenêtres gaussiennes $\{\psi_{\boldsymbol{\mu}},\ \boldsymbol{\mu} = (m,n,p,q) \in \mathbb{Z}^4\}$ constituant un frame de Gabor :

$$U(x,z) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} A_{\boldsymbol{\mu}} \psi_{\boldsymbol{\mu}}(x,z)\ ,\ \boldsymbol{\mu} = (m,n,p,q) \in \mathbb{Z}^4 \qquad (1)$$

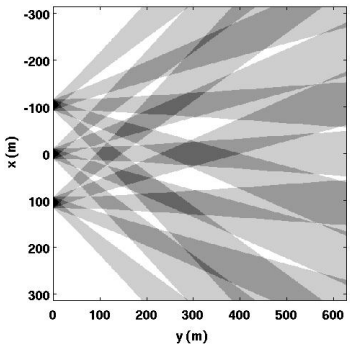


FIG. 3. *Lancer de faisceaux à partir d'un frame de Gabor (coupe 2D dans le plan $xOy$).*

Le frame de Gabor $\{\psi_{\boldsymbol{\mu}}(x,z)\}$ dans $L_2(\mathbb{R}^2)$ est le produit de deux frames dans $L_2(\mathbb{R})$ : $\psi_{\boldsymbol{\mu}}(x,z) = \psi^x_{m,n}(x)\ \psi^z_{p,q}(z)$.

Un frame de Gabor dans $L_2(\mathbb{R})$ est construit par translations spatiale et spectrale d'une fonction gaussienne $\psi$ :

$$\psi^x_{m,n}(x) = \psi(x - m\bar{x}) e^{in\bar{k}_x x} \qquad (2)$$

- $\bar{x}$ et $\bar{k}_x$ sont respectivement les pas de translation spatial et spectral, $m$ et $n$ les indices de translation spatial et spectral.
- La famille de fonctions $\{\psi_\mu,\ \mu \in \mathbb{Z}^2\}$ constitue un frame si et seulement si $\bar{x}\bar{k}_x = 2\pi\nu$, avec $\nu < 1$ ($\nu$ est appelé "facteur de sur-échantillonnage").
- Le meilleur choix des pas de translation est : $\bar{x} = \sqrt{\nu}L$, $\bar{k}_x = \sqrt{\nu}(2\pi/L)$ (frame "équilibré").

Dans ce qui suit, la fonction gaussienne $\psi$ est donnée par :

$$\psi(x) = \left(\sqrt{2}/L\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{-\pi\left(\frac{x}{L}\right)^2} \qquad (3)$$

Les coefficients $A_{\boldsymbol{\mu}}$ de la dé-composition (1) sont obtenus par projection de la fonction distribution $U(x,z)$ sur le frame "dual". Pour un sur-échantillonnage suffisant, ce frame peut être assimilé au frame de départ, à un coefficient multiplicatif près [1].

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{\mu}} &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x,z)\ \varphi^{\times}_{\boldsymbol{\mu}}(x,z)\ dxdz \qquad (4) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,z)\ \frac{\nu_x}{\|\psi\|^2}[\psi^x_{m,n}(x)]^{\times} \\ &\qquad \cdot\ \frac{\nu_z}{\|\psi\|^2}[\psi^z_{p,q}(z)]^{\times}\ dxdz \end{aligned}$$

## III. RAYONNEMENT D'UNE FENÊTRE GAUSSIENNE ET GESTION DES OBSTACLES

Par approximation paraxiale de leur intégrale de spectre d'ondes planes, les champs rayonnés en un point $\boldsymbol{r}$ par une

distribution source gaussienne $\psi_{\boldsymbol{\mu}}(x,z)$ s'expriment sous la forme d'un faisceau gaussien $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{r})$ :

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}_0\sqrt{\frac{\det\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(0)}{\det\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(y_{\boldsymbol{\mu}})}}\exp ik\Big[y_{\boldsymbol{\mu}}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}^t\boldsymbol{\Gamma}(y_{\boldsymbol{\mu}})\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}\Big] \quad (5)$$

où $\boldsymbol{B}_0$ est un vecteur dépendant de la polarisation de la source. Cette expression peut être vue comme l'expression d'un rayon "complexe" de matrice de courbure $\boldsymbol{\Gamma}$ et de facteur de divergence $\sqrt{\frac{\det\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(0)}{\det\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(y_{\boldsymbol{\mu}})}}$. $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}=(x_{\boldsymbol{\mu}},z_{\boldsymbol{\mu}})$ est le vecteur position du point $\boldsymbol{r}$ dans un système de coordonnées lié au faisceau (l'axe de coordonnée $z_{\boldsymbol{\mu}}$ coincide avec l'axe du faisceau).

A partir de la décomposition (1) du champ source, l'expression du champ rayonné $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ est alors obtenue par sommation des faisceaux gaussiens rayonnés par les fenêtres de frame :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\sum_{\boldsymbol{\mu}}A_{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{r})$$

Dans l'algorithme "de base" de LFG (sans re-décomposition), les faisceaux transformés par réflexion/réfraction s'ajoutent ou se substituent à leur faisceau source initial, au fil des transformations successives, et en fonction de la zone de l'espace où est évalué le champ propagé [2].

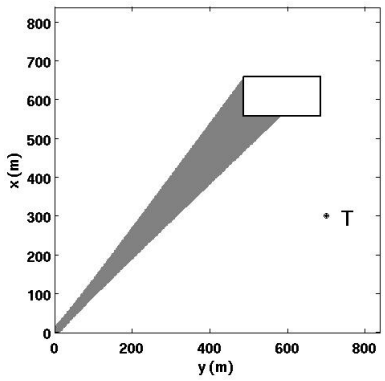


FIG. 4. *Faisceau gauusien incident sur une discontinuité : coupe 2D pour un faisceau propagé dans le plan $xOy$ lancé à partir d'une source placée à l'origine du plan $xOz$ (largeur initiale $L_0=7.36m$ à $f=430MHz$). "T" représente la cible.*

## IV. ALGORITHME DE RE-DÉCOMPOSITION

L'algorithme de re-décomposition comporte trois étapes successives :

1) Décomposition du champ incident sur un frame de fenêtres étroites dans le plan choisi pour effectuer la re-décomposition.
2) Transformation éventuelle des coefficients de pondération de ces fenêtres, si le plan de re-décomposition coïncide avec la paroi d'un obstacle.
3) Changement de frame permettant d'obtenir les coefficients de décomposition de la distribution de champ (incident ou transformé) sur un frame de fenêtres larges, rayonnant des faisceaux collimatés.

Si on note :

- $\underline{A}'_{\mu'}$ le vecteur des coefficients de décomposition du champ transformé sur le frame à fenêtres étroites,
- $C_{\mu}^{\mu'}$ la matrice de changement de frame, avec $\mu'$ les indices de fenêtres de frame étroites et $\mu$ les indices de fenêtres du frame final,
- $\underline{A}_{\mu}$ le vecteur des coefficients de décomposition du champ transformé et diffracté sur le frame à fenêtres larges,

alors le "changement de frame" est obtenu par simple produit matriciel :

$$\underline{A}_{\mu}=C_{\mu}^{\mu'}\underline{A}'_{\mu'}$$

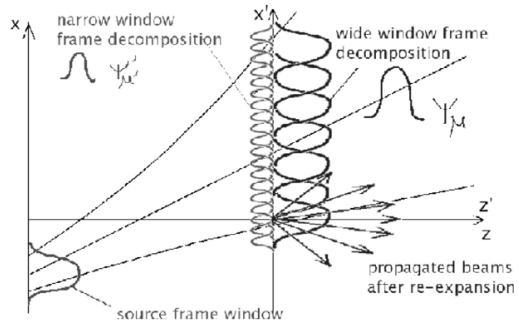


FIG. 5. *Re-décomposition du champ dans un plan.*

L'utilisation d'un frame intermédiaire à fenêtres étroites est particulièrement utile car elle permet de prendre en compte les discontinuités abruptes de l'environnement et d'obtenir des expressions analytiques approchées pour les coefficients de la matrice de changement de frame [4]. Pour des fenêtres très étroites cette représentation du champ pour une surface limitée tend vers celle de l'Optique Physique.

La figure 6 montre les "chemins" suivis par le champ propagé depuis la source à l'origine jusqu'à la cible T via la réflexion et la diffraction d'un faisceau source. Seuls les faisceaux ayant un champ non négligeable au point cible sont pris en compte dans la superposition finale.

## V. CONCLUSION

Un algorithme de Lancer de Faisceaux Gaussiens 3D est proposé pour surmonter certaines limitations des méthodes d'Equation Parabolique et de Lancer ou Tracé de Rayons. Le LFG consiste à décomposer le champ émis sur un frame puis à suivre les axes des faisceaux dans l'environnement. Une formulation de re-décomposition est appliquée dans les cas de propagation sur de très longues distances (faisceau très élargi) et d'incidence sur des discontinuités. Une évaluation de la précision de cet algorithme dans des cas typiques de propagation radar terrestre est en cours.

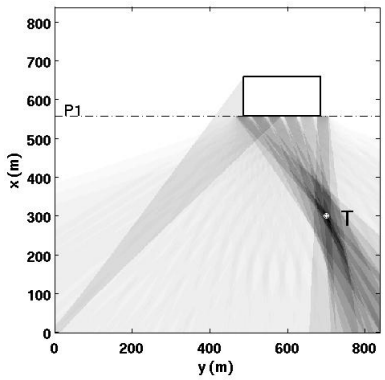


FIG. 6. Faisceau incident et nouveau lancer de faisceaux à partir des champs réfléchis par l'obstacle dans le plan $P1$. Les faisceaux constituant les chemins parcourus vers la cible $T$ sont les plus foncés.

## RÉFÉRENCES

[1] D. Lugara, C. Letrou, A. Shlivinski, E. Heyman, A. Boag, "Frame-based Gaussian beam summation method : theory and applications," *Radio Science,* vol. 38, no. 2, 8026, 2003.

[2] A. Fluerasu, "Modélisation de champs dans le domaine spatio-temporel par une méthode de frame de Gabor. Application à la caractérisation du canal indoor millimétrique," *Thèse de Doctorat*, Univ. Marne-la-Vallée, 2003.

[3] D. Lugara, A. Boag, C. Letrou, "Gaussian beam tracking through a curved interface : comparison with a method of moments," *IEE Proc. - Microw., Antennas and Propag.,* vol. 150, no. 1, pp. 49–55, 2003.

[4] C. Letrou, "A Gaussian beam shooting scheme for fast multidimensional physical simulation of propagation channels in wireless communication systems," *Intern. Conf. on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA '07),* Torino, Italy, 2007.