Multifractalité et non stationnarité du phénomène précipitant: applications aux fonctions de répartition et à la modélisation des événements extrêmes

Multifractality and non stationarity of rain processes: appliances to CDFs and extreme events modelling

S. Verrier *, L. de Montera *, C. Mallet * et L. Barthès *

* LATMOS 10-12 rue de l'Europe 78140 Vélizy-Villacoublay, contact: verrier@latmos.ipsl.fr

Résumé

L'application de techniques d'analyse multifractale à la pluie a permis de montrer que celle-ci pouvait être représentée au moyen du modèle Fractionnally Integrated Flux (developpé par Schertzer et Lovejoy [1]). Ce modèle caractérise le processus au moyen de trois paramètres fondamentaux α, C_1, *H*, représentant respectivement l'indice de multifractalité, la dispersion du niveau moyen, et la non stationnarité du champ. L'analyse de séries chronologiques et de cartes radars de taux précipitants collectés au cours de la campagne AMMA (Analyse Multidisciplinaire de la Mousson Africaine) au Bénin durant la saison des pluies 2006 a permis l'estimation de ces paramètres et notamment de trouver un *H* autour de 0.5, traduisant la non stationnarité du phénomène. Nous avons utilisé la connaissance de ces trois paramètres pour développer un simulateur de champs précipitants, que l'on a validé par analyse multifractale. Nous nous sommes intéressés à la fonction de répartition de l'intensité de pluie simulée et avons montré que le caractère non stationnaire des précipitations induisait celui de la fonction de répartition, correspondant à la non convergence de celle-ci sur un temps important. Il est possible d'en déduire que la connaissance d'une fonction de répartition expérimentale en un lieu donné et sur une période fixée peut difficilement être extrapolée à des périodes de temps disjointes, et ceci du fait de la nature même du phénomène précipitant. Nous appliquerons ensuite notre simulateur à la modélisation des extrêmes, en s'appuyant sur la notion de singularité maximale presque jamais dépassée.

Mots clés: précipitations, multifractals, non stationnarité, événements extrêmes.

Abstract

Multifractal analysis techniques have shown that rain could fit the Fractionnally Integrated Flux model (developed by Schertzer and Lovejoy [1]). This describes the process with only three fundamental parameters α, C_1, *H*, corresponding respectively to the multifractality index, the sparsity of the average level of intensity, and the non-stationarity of the field. The analysis of rain rate disdrometer time series and radar maps collected during the African Monsoon Multidisciplinary Analysis campaign led to estimate the parameters and especially *H*, which was found around 0.5, meaning the non-stationarity of the phenomenon. The knowledge of these three parameters has been used to build a rainfall field simulator, validated by multifractal analysis. Then, the rain intensity cumulative distribution function of the simulated fields has been considered: it has been shown that the non-stationarity of rain implied the same property with the CDF, corresponding to its non-convergence over a great time interval. It may result in the fact that the knowledge of an experimental CDF at a given place on a fixed period may difficultly be extrapolated to disjoint time periods, due to the rainfall process physical properties. To illustrate, another application of the simulator on extreme events modelling will be shown, by using the notion of maximal probable singularity.

Keywords: rain, multifractals, non stationarity, extreme events.

1. Introduction

La modélisation de la pluie présente un grand intérêt du point de vue météorologique, économique (cas des ouragans) mais également pour toutes les applications étudiant la propagation et l'affaiblissement des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère, puisqu'il s'agit d'une modélisation du canal de propagation. Il s'agit également d'un problème délicat en raison de son extrême variabilité, de son intermittence, mais aussi de la grande gamme d'échelles impliquée dans son étude. La caractérisation de ses propriétés d'invariance d'échelle permet notamment de résoudre ce dernier point et découle d'études antérieures relatives à la modélisation de la turbulence au moyen des cascades multiplicatives, le lien résultant directement de celui entre la turbulence et les phénomènes physiques à l'origine de la pluie. Diverses études ont montré l'adéquation du formalisme multifractal à la modélisation de la pluie. Le modèle universel [1] a notamment permis de résumer l'information d'une construction multifractale à trois paramètres fondamentaux. Toutefois, la littérature montre un certain désaccord entre les estimations des paramètres spatiaux et temporels pour la pluie. Nous nous appuyons dans cet article sur une précédente publication [2] dont nous étendons les résultats pour justifier le caractère non stationnaire du phénomène précipitant. Nous étudions alors ses conséquences sur la non convergence des fonctions de répartition des champs de pluie, et sur les limitations que cela pourrait induire sur le réalisme des modèles théoriques de CDF. Enfin, nous consacrons une partie à l'étude des événements extrêmes et à caractériser les propriétés d'invariance d'échelle du maximum du champ.

2. Le modèle multifractal

2.1. Fractals, multifractals, et cascades multiplicatives

Les objets fractals, qui constituent des ensembles géométriques autosimilaires, présentent l'inconvénient de ne pas pouvoir représenter de grandeurs continues. Le formalisme multifractal permet quant à lui de représenter des champs invariants en échelle en généralisant la notion de fractal : un champ sera dit multifractal si l'ensemble géométrique obtenu par un seuillage quelconque est fractal. Le problème consiste à définir une notion de seuil indépendante de l'échelle à laquelle le champ est observé, étant donné que l'un des intérêts du modèle est de pouvoir décrire des propriétés du champ valables à toute résolution. A ce titre, on introduit la notion de singularité à laquelle correspond un unique seuil par résolution. De façon plus précise que dans la formulation précédente, un champ multifractal est un champ pour lequel on peut associer une dimension fractale à chaque singularité.
Pour construire des champs multifractals, nous avons employé la construction dite des cascades multiplicatives qui a été développée en amont du modèle multifractal ([3]-[5]). Cette construction permet de déduire le champ à une résolution donnée à partir du champ à une résolution plus grossière en décomposant un gros pixel en pixels plus petits et en calculant la valeur des petits pixels à partir de celle du gros pixel. Le cas le plus simple de cascade multiplicative discrète est celui du α-modèle [6] où le champ sur les petits pixels est estimé en multipliant celui du gros pixel englobant par des variables aléatoires binaires i.i.d., moyennant certaines conditions de conservation du champ. Pour une présentation détaillée au sujet des multifractals et des les cascades multiplicatives, il est possible de se référer à [7].

2.2. Propriétés fondamentales des multifractals

Dans ce qui suit, nous notons λ la résolution d'observation du champ et D la dimension de l'espace (soit 1 dans le cas de séries temporelles et 2 dans le cas de cartes spatiales). Par définition de la résolution, cela veut dire que l'espace est observé sur λ^D pixels (voir Fig.1) de coté de longueur $l = \frac{l_0}{\lambda}$ qui constitue l'échelle correspondant à cette résolution. En notant ε_λ le champ multifractal considéré à la résolution λ, nous pouvons alors écrire l'équation fondamentale du formalisme

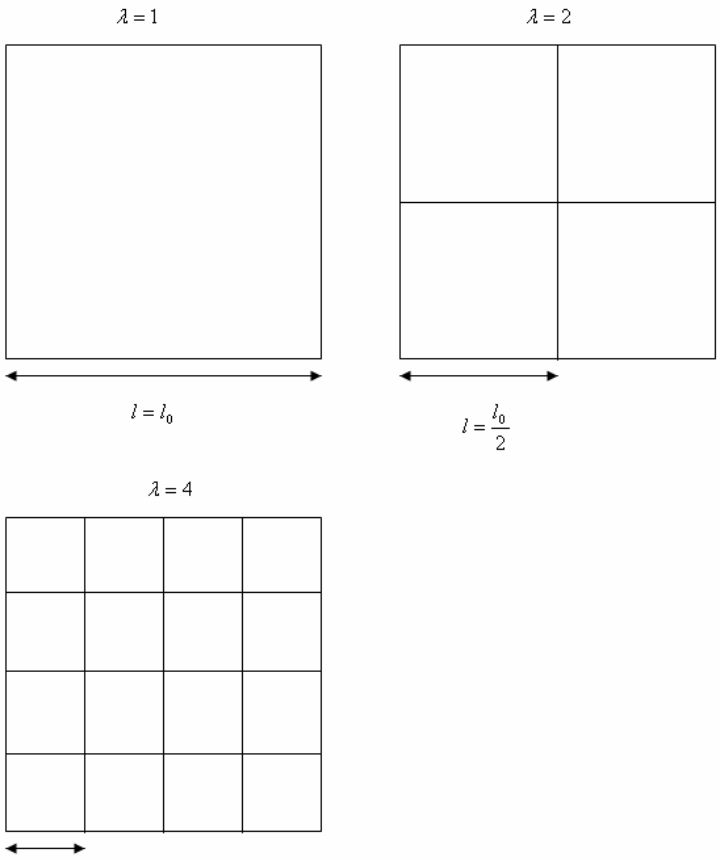


Fig.1- Découpage d'une carte: notions de résolution λ et d'échelle l.

multifractal [8], qui généralise une propriété des objets fractals en tenant compte des remarques précédentes :

$$\Pr(\varepsilon_\lambda > \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (1)$$

où γ désigne la singularité, que l'on peut faire varier indépendamment de la résolution au contraire du seuil λ^γ, et où $c(\gamma)$ est la codimension du champ multifractal, associée à la singularité γ, ce qui signifie que la dimension fractale correspondant à un seuillage par λ^γ est $D - c(\gamma)$. En faisant varier la singularité, on obtient ainsi la fonction de codimension *c*, qui caractérise entièrement la fractale. Cette fonction présente la propriété d'être croissante et convexe. On préfère travailler avec la codimension plutôt qu'avec la dimension en raison de sa signification plus indépendante de la dimension de l'espace englobant et aussi du fait qu'elle puisse prendre des valeurs supérieures à *D*.

Remarquons dès à présent qu'il est possible de relier la distribution de probabilité et les moments statistiques du champ, et d'en déduire l'expression de ceux-ci ([1], [9])**.**

On obtient alors, de façon équivalente à (1) :

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (2)$$

qui signifie qu'à un ordre *q* fixé, les moments de cet ordre vont suivre une loi puissance en fonction de la résolution. L'exposant va permettre de définir la fonction d'échelle des moments $K(q)$, croissante

et convexe, qui caractérise entièrement la fractale, de façon équivalente à la fonction de codimension. On peut montrer que $c(\gamma)$ et $K(q)$ sont reliés par une transformation de Legendre [10]:

$$c(\gamma) = \max_q \{q\gamma - K(q)\}$$
$$K(q) = \max_\gamma \{q\gamma - c(\gamma)\} \qquad (3)$$

d'où on peut déduire l'existence d'une correspondance bijective entre un ordre de singularité et un ordre de moments :

$$q_\gamma = c'(\gamma) \text{ et } \gamma_q = K'(q) \qquad (4)$$

Dans la construction par cascades multiplicatives, on impose généralement une condition de conservativité stipulant que la moyenne du champ ne doit pas dépendre de sa résolution soit :

$$\forall \lambda : \langle \varepsilon_\lambda \rangle = M \qquad (5)$$

signifiant que $K(1) = 0$

2.3. Le modèle universel

L'inconvénient du modèle présenté jusque ici est le fait que la fonction de codimension, ou de manière équivalente la fonction d'échelle des moments, n'ont aucune structure imposée en dehors de leur croissance et de leur convexité. Par conséquent, la caractérisation du champ multifractal nécessiterait a priori de connaître $c(\gamma)$ et $K(q)$ en tout point. La question se pose alors de savoir s'il est possible de paramétrer ces fonctions. Le modèle des multifractals universels ([1], [11]) permet de répondre affirmativement en montrant que les champs obtenus au moyen de cascades multiplicatives continues relèvent de classes d'universalité et peuvent être caractérisés au moyen de deux paramètres seulement. En effet, ces champs peuvent être construits en prenant pour générateur un mouvement de Lévy fractionnaire d'indice α, dont la valeur est entre 0 et 2, ce dernier cas correspondant en fait à un mouvement brownien fractionnaire.

Les multifractals universels admettent une fonction d'échelle des moments de la forme :

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1}(q^\alpha - q) \qquad (6)$$

ce qui donne : $c(\gamma) = C_1 (\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha})^{\alpha'}$ (7)

Avec : $\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha} = 1$

α est un indice de multifractalité caractérisant la rapidité de variation de la codimension en fonction de la singularité.

Le paramètre C_1 représente la codimension associée au niveau moyen du champ, soit $c(\gamma_1)$ où γ_1 est l'unique singularité associée au moment d'ordre 1, c'est-à-dire à la moyenne. C_1 est un indicateur de la dispersion des pics.

2.4. Généralisation au cas non conservatif

Dans la pratique, la plupart des champs observés ne vérifient pas la propriété de conservativité. Le modèle le plus utilisé consiste à déduire le champ non conservatif d'un champ conservatif par une intégration fractionnaire, ce qui ajoute un troisième paramètre au modèle : l'ordre H de l'intégration fractionnaire. On obtient ainsi le modèle FIF (Fractionnally Integrated Flux).Le champ non conservatif R_λ s'écrit alors ([1], [12]) :

$$R_\lambda(\vec{x}) = \int d\vec{x}'.\frac{\varepsilon_\lambda(\vec{x}')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^{D-H}} \qquad (8)$$

On a alors la propriété suivante, qui généralise (2) :

$$\left\langle \left|h_\lambda(x+\Delta x)-h_\lambda(x)\right|^q \right\rangle \propto \lambda^{-(\zeta(q))} \qquad (9)$$

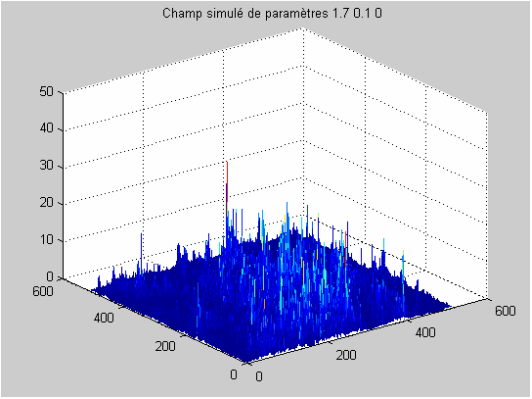
où $\zeta(q) = qH - K(q)$ et $\Delta x = \frac{l_0}{\lambda}$.

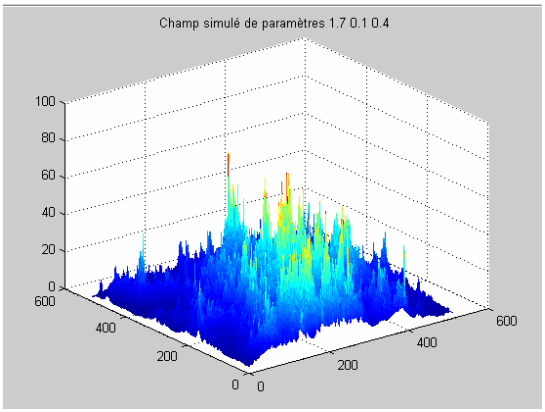
Il est aussi à noter que H peut être vu comme un paramètre de non stationnarité, en effet quand $H = 0$, les moyennes et variances statistiques sont connues par la formule (2) qui est indépendante du point : le processus est donc stationnaire. En revanche, dans le cas $H \neq 0$, il n'y a pas de formule générale et les moyennes et variances peuvent dépendre du point. Ce cas correspond à un processus intégré, donc non stationnaire.

2.5. Simulation des multifractals universels

Nous avons appliqué la méthode développée par Pecknold [13] pour simuler des champs en fonction des trois paramètres. Nous pouvons notamment donner une illustration de la signification physique de C_1 et de *H*, qui s'interprètent plus aisément que α. On constate (Fig. 2-3) que plus H est grand plus le champ est lissé et qu'une augmentation de C_1 provoque une plus grande dispersion des pics.

Fig.2- Mise en évidence de l'influence du paramètre *H* par des simulations. *H* vaut respectivement 0, 0.4 et 0.8 de haut en bas)





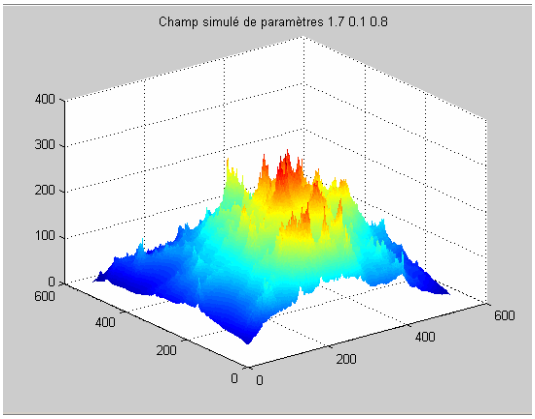
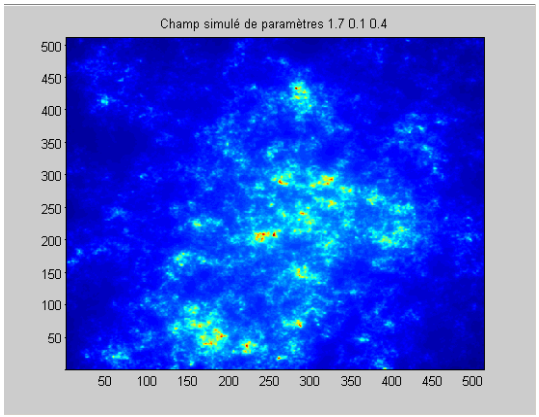
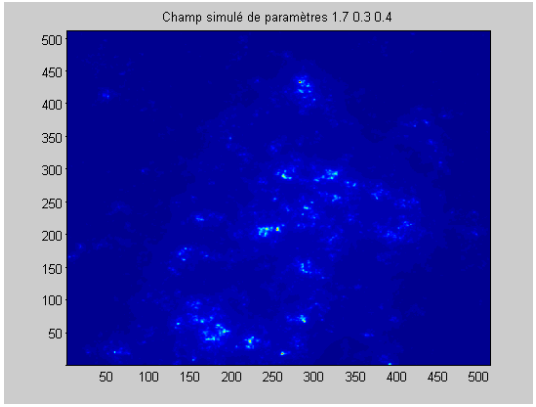
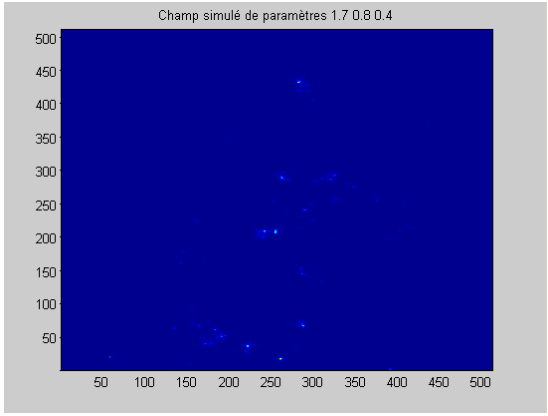


Fig.3- Mise en évidence de l'influence du paramètre C_1 par des simulations (respectivement 0.1,0.3 et 0.1, 0.3, 0.8 de haut en bas)







3. Analyse de données radar

3.1. Jeu de données

On dispose 1372 cartes de réflectivité radar obtenues par le radar RONSARD du CETP (aujourd'hui LATMOS) près de Djougou au Bénin à l'occasion de la campagne AMMA (Analyse Multidisciplinaire de la Mousson Africaine) durant l'été 2006. Ce radar, émettant en bande C (5.6 GHz) a fourni des cartes toutes les 7 minutes environ. Les cartes sont ensuite projetées en coordonnées cartésiennes sur des grilles de dimensions 256x256 avec une taille de pixel de 400 m de coté.

3.2. Techniques d'analyse

La première condition nécessaire à vérifier est que le spectre de puissance varie selon une loi puissance en fonction du nombre d'onde. En effet, dans le cadre d'un champ multifractal conservatif, il doit varier selon la loi suivante [14]:

$E(k) = k^{-\beta}$ (10),

où $\beta = 1 - K(2)$.

Dans le cas d'un champ intégré, cette formule se généralise aisément en remarquant que l'intégration fractionnaire revient à multiplier la transformée de Fourier du champ par k^{-H} :

$\beta = 1 - K(2) + 2H$ (11)

On peut aussi estimer *H* avec cette formule si on connaît $K(2)$ (voir ci-après), mais il est possible de l'estimer directement en calculant la fonction de structure du premier ordre du champ, qui doit d'après (9) donner un tracé linéaire de pente H en coordonnées log-log :

$$\log_2\left(\left\langle\left|\Delta h(\Delta\vec{x})\right|\right\rangle\right) = \log_2\left(\left\langle\varepsilon_\lambda\right\rangle\right) + H.\log_2\left(\left|\Delta\vec{x}\right|\right) \qquad (12)$$

L'étape suivante de l'analyse consiste à étudier les moments du champ multifractal (conservatif) sous-jacent. Pour estimer ce dernier, nous utilisons une approximation en lieu et place d'une dérivation fractionnaire d'ordre *H*, lequel n'est d'ailleurs pas connu exactement (mais peut être estimé). En effet, on peut montrer [15] qu'il suffit simplement de prendre la valeur absolue du gradient à la résolution maximale puis de dégrader la résolution par des moyennages successifs.

On peut alors estimer les moments du champ : pour chaque ordre *q*, le moment de cet ordre doit varier, d'après (2) en loi puissance de la résolution, ce qui doit donner un tracé linéaire de pente $K(q)$, ce qui nous permet d'estimer la fonction d'échelle des moments et donc de caractériser la multifractalité du champ. L'estimation des paramètres peut alors être effectuée aisément en remarquant que $K'(1) = C_1$ et $K''(1) = C_1.\alpha$. On peut également utiliser la technique du Double Trace Moment (DTM) [15] pour vérifier la valeur de α

3.3. Analyse du champ de pluie intermittent

La figure 4 donne le spectre moyen des 1372 cartes, préalablement converties en cartes de taux précipitants pour permettre une comparaison ultérieure avec les paramètres temporels mesurés au moyen d'un spectropluviomètre. On constate une linéarité correcte sauf pour les deux résolutions les plus élevées où le spectre s'aplatit nettement suggérant la dominance du bruit à ces résolutions. De fait, comme le montre la carte prise en exemple (Fig. 5), les points lointains du centre donc du radar correspondent fréquemment à des valeurs manquantes. ou à des valeurs peu fiables comptent tenu de la distance élevée et de la taille du volume sondé. C'est pourquoi nous restreignons

Fig.4- Spectre moyen des 1372 cartes AMMA (256x256)

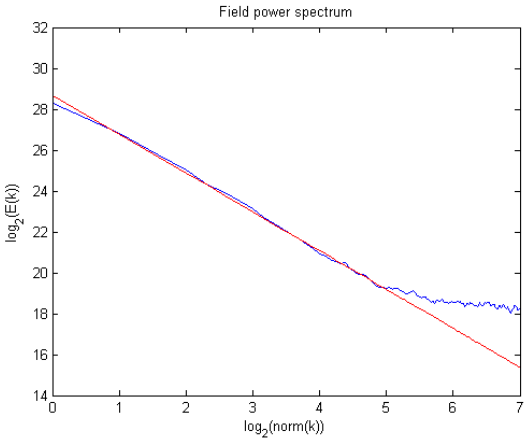
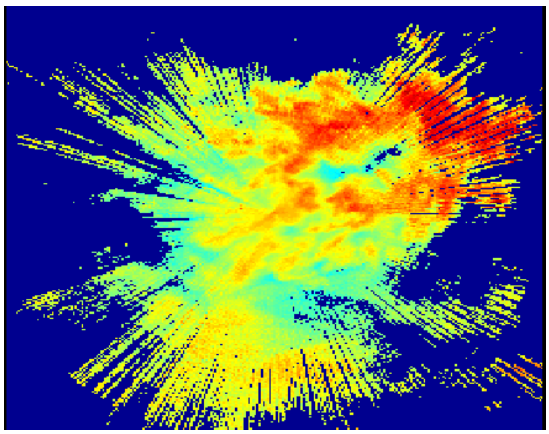


Fig. 5- Exemple de carte de réflectivité (log) obtenue par le radar RONSARD en juin 2006



l'analyse à des sections de 64x64 pixels automatiquement prises au centre de chaque carte. La figure 6 présente le nouveau spectre obtenu. On constate que le spectre est bien linéaire en échelle log-log à toutes les résolutions, sa pente est $\beta = 1.27$. Les figures 7 et 8 présentent les moments du laplacien en fonction de la résolution, pour des ordres variant de 0 à 2, pour les deux cas vus précédemment. On constate (Fig. 8) que dans le cas des cartes 64x64, on obtient une linéarité très satisfaisante, à l'exception de la résolution la plus grossière où l'estimation est moins significative. En revanche la figure 7 montre qu'entre les résolutions $\lambda = 16$ et $\lambda = 32$ se produit une cassure dans l'invariance d'échelle. Ce résultat semble être du à l'intermittence : il y a respectivement 8% et 40 % de points où le radar détecte une valeur supérieure à son seuil de sensibilité sur les deux lots de cartes étudiés. Ce résultat est cohérent avec [2] qui a montré, dans le cas de séries temporelles, comment l'intermittence introduit une telle cassure et biaise l'estimation des paramètres. Dans le cas de la figure 8, l'intermittence est assez faible pour faire disparaître la cassure, mais est toujours susceptible de biaiser quelque peu l'estimation des paramètres.
L'estimation des paramètres a été faite dans les deux cas via les moments mais également avec les fonctions de structure et tracés de la DTM présentés sur les figures 9-12.

Le tableau suivant récapitule les estimations des paramètres dans les deux cas.

	Alpha (moments)	Alpha (DTM)	C1	H
1372 cartes 256x256	0.73	0.72	0.88	0.20
1372 cartes 64x64	1.25	1.29	0.51	0.27

Fig. 6- Spectre moyen des 1372 cartes de pluie (cartes centrales 64x64)

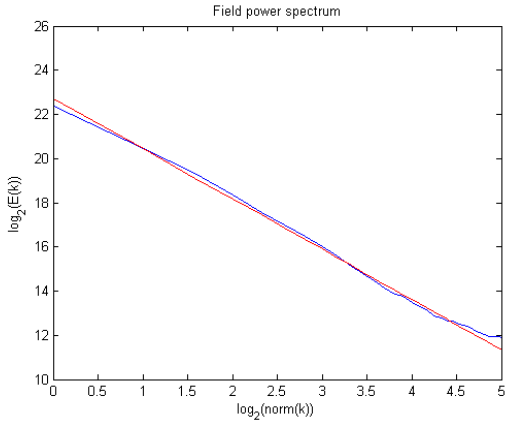


Fig. 7- Moments du champ de pluie (cartes 256x256)

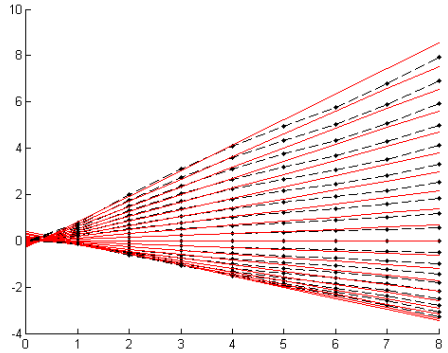


Fig. 8- Moments du champ de pluie (cartes 64x64)

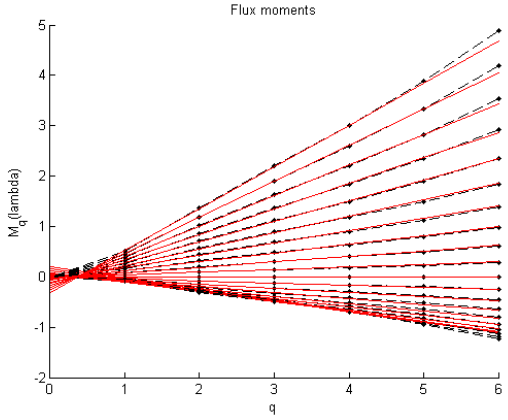


Fig. 9- Fonction de structure des 1372 cartes 256x256

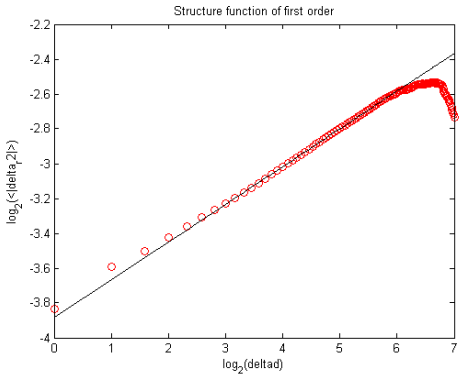


Fig. 9- Fonction de structure des 1372 cartes 256x256

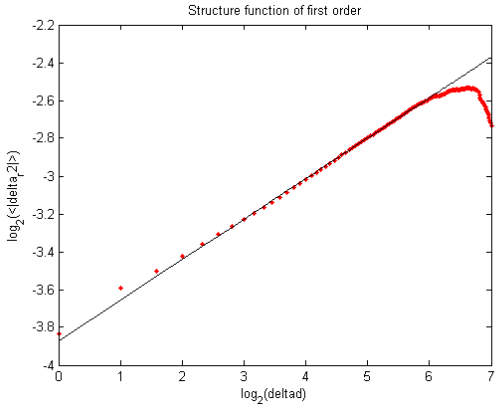


Fig. 10- Fonction de structure des 1372 cartes 64x64

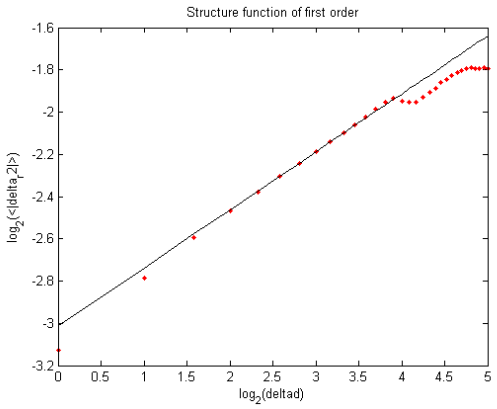


Fig. 11- DTM appliquée aux 1372 cartes 256x256 (ordre q=2)

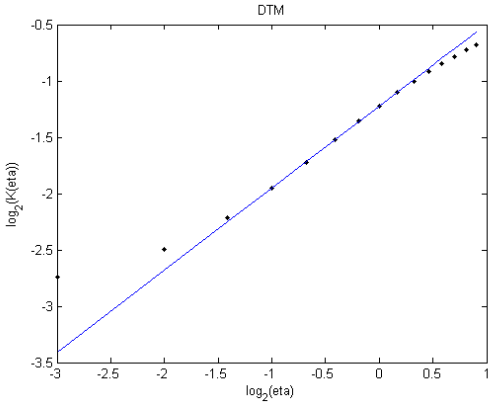
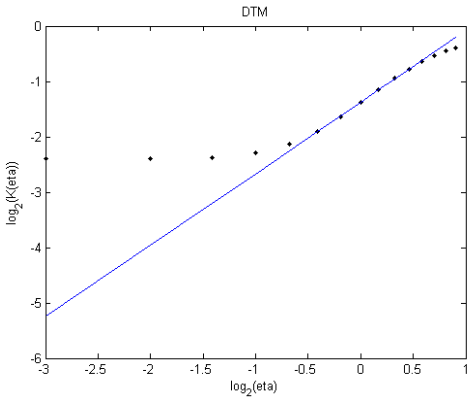


Fig. 12- DTM appliquée aux 1372 cartes 64x64 (ordre q=2)



3.4. Analyse de portions non intermittentes du champ

Nous avons choisi 30 restrictions centrales 64x64 quasiment non intermittentes , avec 99.6% de points contenant une donnée pluvieuse. Les tracés du spectre, des moments, de la fonction de structure, et de la DTM sont donnés ci-après (Fig. 13-16). Nous obtenons une pente spectrale

Fig. 13- Spectre de puissance des 30 cartes non intermittentes

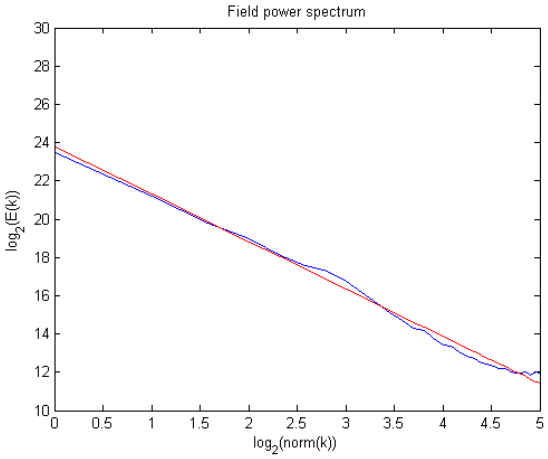


Fig. 14- Moments des 30 cartes non intermittentes

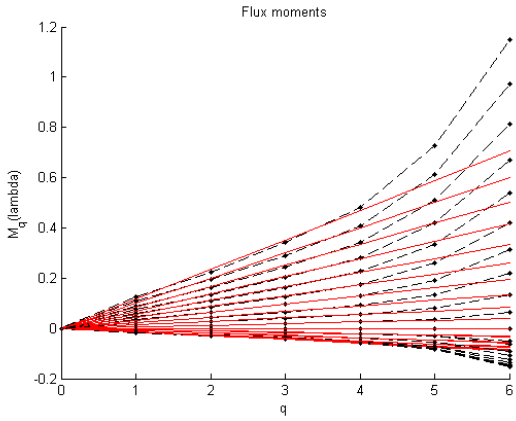


Fig. 15- Fonction de structure des 30 cartes non intermittentes

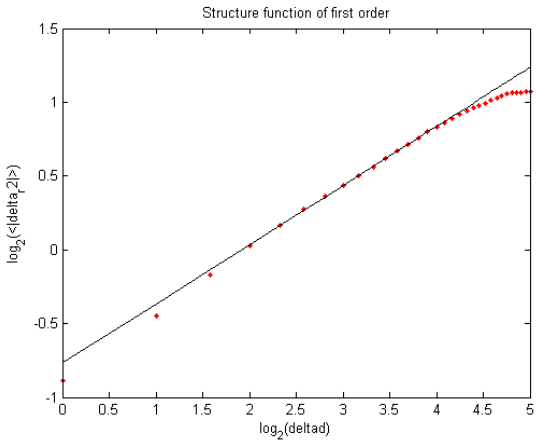
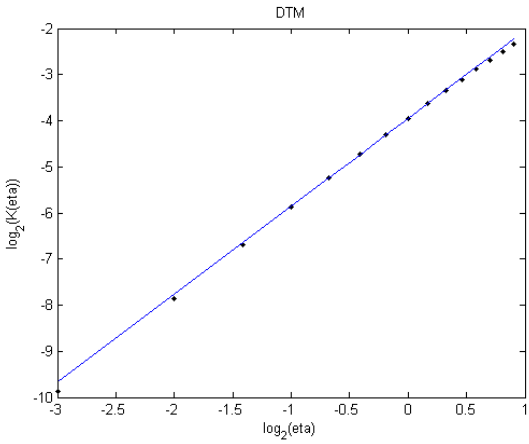


Fig. 16- DTM des 30 cartes non intermittentes avec q=2



de $\beta = 1.47$. Les paramètres du modèle sont alors estimés et les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-après :

	Alpha (moments)	Alpha (DTM)	C1	H
30 cartes 64x64	1.80	1.89	0.07	0.40

3.5. Discussion

La plupart des études effectuées sur la pluie telles que [16]-[23] (pour un récapitulatif, on pourra aussi se référer à [24, [25]) ont obtenu (ou posé a priori) une valeur nulle pour H . De plus les études temporelles donnent des paramètres de (α, C_1) voisins de (0.6, 0.5) dans le cas de séries temporelles et (1.4, 0.2) dans le cas de cartes 2D. Ceci étant, comme souligné dans [2] ces estimations n'ont généralement pas tenu compte de l'intermittence dont nous venons de montrer l'importance. Ce dernier article proposait des valeurs de paramètres pour des séries temporelles non intermittentes obtenues dans le même lieu que les cartes analysées ici. Comme le montre le récapitulatif ci-dessous, les paramètres s'écartent ici aussi de ceux de la littérature:

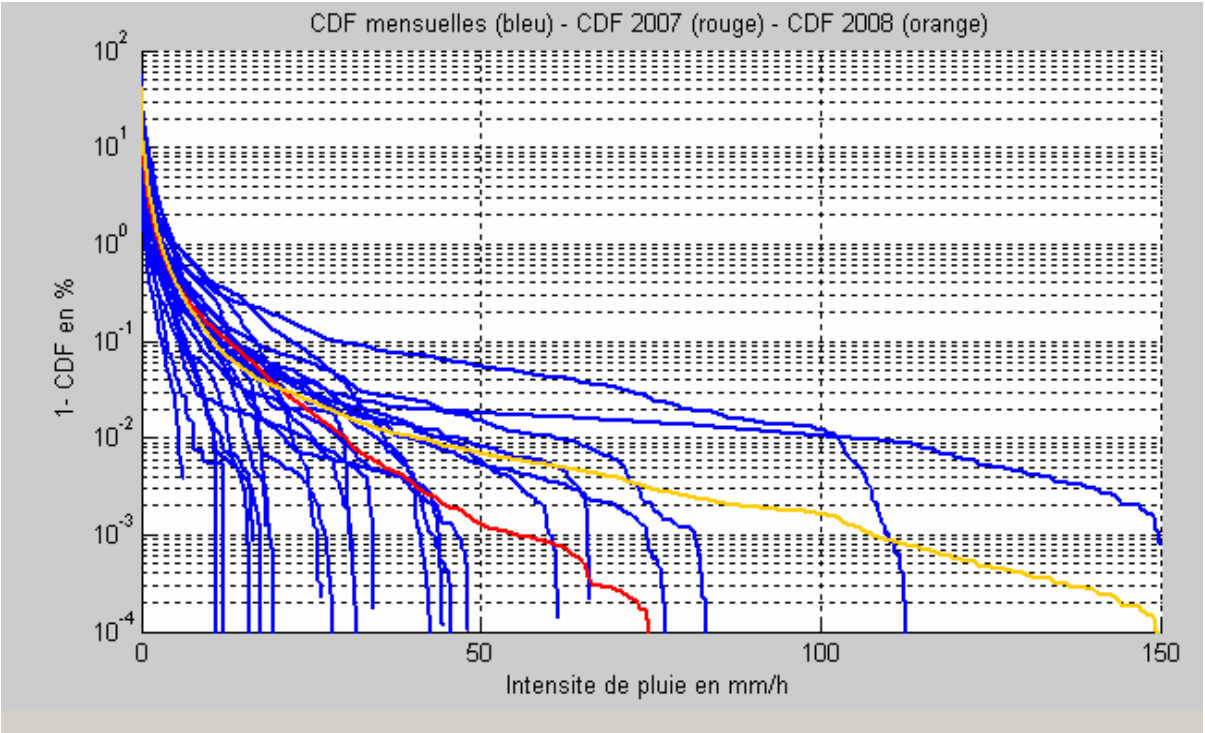
	Alpha (moments)	C1	H
Littérature (temporel) avec intermittence	0.6	0.5	0
Séries temporelles AMMA [2] non intermittentes	1.68	0.13	0.64
Littérature (spatial) avec intermittence	1.4	0.2	0
Cartes radar AMMA/RONSARD non intermittentes	1.80	0.07	0.40

On remarque également que les paramètres que l'on vient de trouver dans le cas des cartes AMMA sont assez proches des paramètres obtenus pour les séries temporelles de la même campagne de mesures, cette similitude confirmant la pertinence de l'analyse non intermittente puisqu'elle résout en grande partie la divergence constatée jusque-là dans la littérature, mais non expliquée, entre les paramètres temporels et spatiaux.

4. Conséquences sur la fonction de répartition du champ

On caractérise fréquemment le phénomène pluvieux par les CDF/PDF déduites des données expérimentales, généralement annuelles. Les modèles [28] développés à partir de différentes mesures de pluviométrie fournissent la CDF des intensités de pluie en divers points du globe. Cependant, ces modèles ne fournissent qu'une valeur moyennée sur quelques années de mesure et ne prennent pas en compte la variabilité du processus. On constate cependant qu'expérimentalement les fonctions de répartition peuvent différer assez nettement d'une année sur l'autre. A titre d'illustration, on pourra se reporter à la Fig. 17, qui montre les fonctions de répartitions déduites de deux années de mesures lors de la campagne expérimentales Syracuse 3, obtenues dans la région de Rennes. Les fonctions de répartition mensuelles sont indiquées en bleu, tandis que leurs moyennes annuelles (2007 et 2008) sont indiquées en rouge et en orange. Il apparaît nettement que ces CDF ont une forte variabilité intermensuelle, mais aussi que leur moyenne annuelle peut différer sensiblement, bien que ces dernières ne soient pas affectées par les tendances saisonnières.

Fig. 17- Fonctions de répartition des intensités de pluie mensuelles et annuelles dans le cadre de l'expérience ESOPE près de Rennes.



Précédemment, nous avons vu que les analyses effectuées sur des données non intermittentes fournissent des valeurs de *H* non nulles, ce qui implique que la cascade multiplicative modélisant le champ de pluie est de moyenne conservative. Comme mentionné plus haut, cela induit que les séries et champs de pluie ont un comportement non stationnaire, aussi bien au sens statistique que spatio-temporel. Il apparaît par conséquent que la pluie, en un lieu donné, n'a aucune raison d'avoir une unique CDF et ce même si les paramètres multifractaux restent constants d'une année sur l'autre. La simulation Fig.18 montre les CDF obtenues par simulation de séries temporelles avec des paramètres proches de ceux obtenus par [2] sur des données AMMA, à l'exception de H qui est ici fixé à 0.
On constate que les données mensuelles (courbes vertes) présentent une variabilité modérée, et que les données annuelles (courbes rouges) fournissent presque exactement la même CDF.
La Fig. 19 présente la même analyse avec un H plus proche de celui effectivement obtenu, soit 0.50. Sur ces tracés, même les données à grande échelle (rouge) donnent des CDF variables d'une année sur l'autre.
Le modèle FIF non conservatif reproduit donc bien, à paramètres constants, une variabilité de la CDF, même pour des échantillons très grands, à cause de l'absence de convergence vers une limite. Ceci suggère donc que la caractérisation au moyen des paramètres multifractals serait plus appropriée que la prédiction des distributions de probabilités par des modèles stationnaires. De plus, le modèle FIF permet de représenter la pluie sur toute une échelle de résolutions, alors que la modélisation par CDF n'est fondamentalement valable qu'à une résolution donnée et ne peut être extrapolée simplement à d'autres résolutions à cause de la non conservativité du phénomène.

Fig. 18- Simulation des fonctions de répartition mensuelles et annuelles dans le cas *H*=0

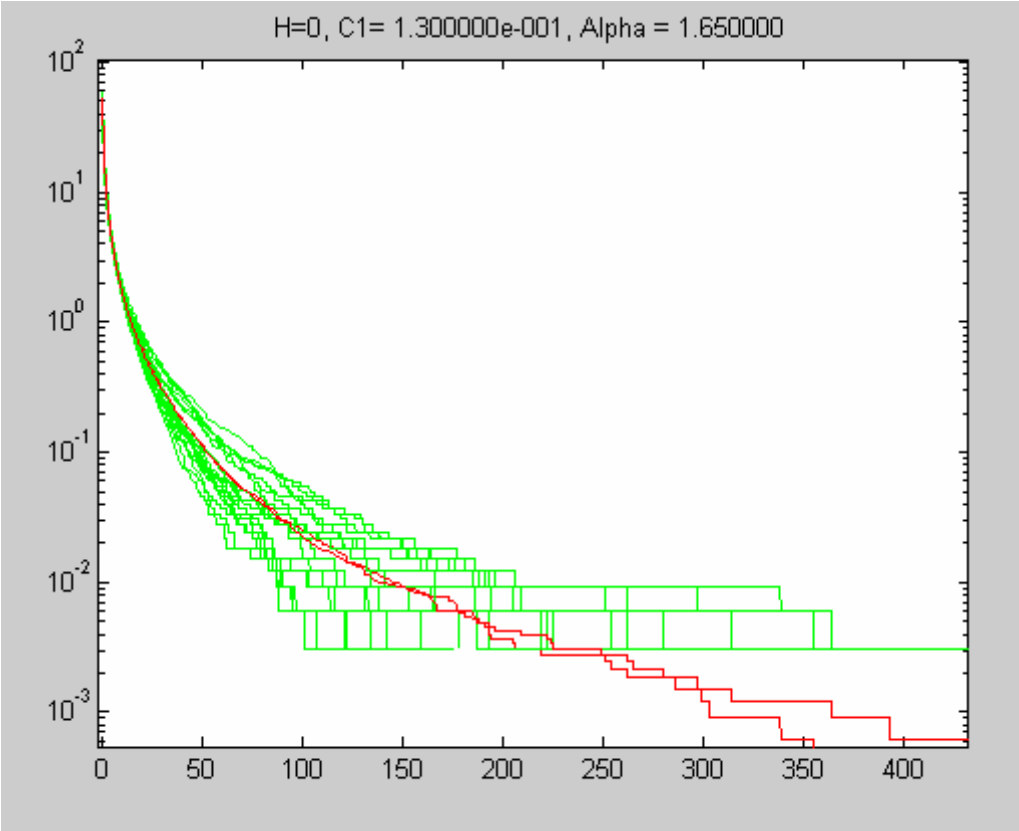
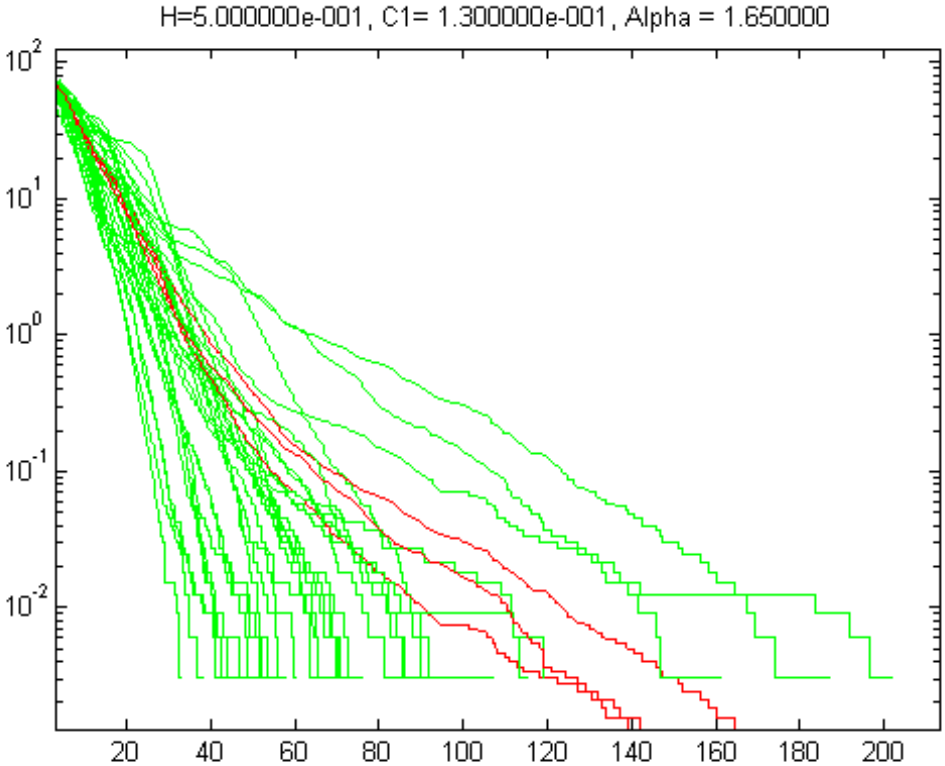


Fig. 19- Simulation des fonctions de répartition mensuelles et annuelles dans le cas *H*=0.5



5. Les propriétés du maximum du champ

Le formalisme multifractal définit des propriétés d'invariance d'échelle qui peuvent être utilisées pour modéliser un champ à des échelles plus fines que celles accessibles à un type de mesure (downscaling). On peut également remarquer qu'il permet de caractériser les événements extrêmes indépendamment de l'échelle. A ce titre, la notion de singularité maximale presque jamais dépassée ([9],[26], [27]) offre une modélisation pertinente pour les événements les plus forts. Cette singularité γ_s est telle qu'en moyenne, elle n'est dépassée qu'en un seul pixel sur chaque carte à toute résolution. Mathématiquement, cela signifie donc, dans le cas conservatif, que :

$\Pr(\varepsilon_\lambda > \lambda^{\gamma_s}) \approx \lambda^{-D}$, ce qui entraîne :

$$c(\gamma_s) = D \qquad (14)$$

Connaissant l'expression théorique ([1]) de la fonction de codimension en fonction des paramètres du modèle, il est possible d'en déduire :

$$\gamma_s = C_1 \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(\left(\frac{D}{C_1}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\right) \qquad (15)$$

La connaissance de γ_s permet de déduire, conformément à (1), la valeur maximale presque jamais dépassée $R_s(\lambda)$ du champ à une résolution λ à partir de sa moyenne R_1 :

$$R_s(\lambda) = R_1 \times \lambda^{\gamma_s} \qquad (16)$$

Notons que cette équation reste vérifiée localement, c'est-à-dire en prenant la moyenne sur un pixel de résolution λ_0, on peut en déduire la valeur maximale presque jamais dépassée sur tous ses sous-pixels de résolution $\lambda_0 \lambda$.

En assimilant $R_s(\lambda)$ au maximum du champ $R_m(\lambda)$ à la résolution λ, il apparaît donc que le tracé en log-log du rapport entre le maximum du champ et sa moyenne (laquelle est indépendante de la résolution dans le cas conservatif) en fonction de la résolution doit être linéaire de pente γ_s.

Bien évidemment, l'équation précédente n'est pas valable si H est non nul. Ceci étant, il est intéressant d'étudier si le maximum présente néanmoins des invariances d'échelle, au moins à *H* faible. Pour cela nous avons cherché à préciser le comportement du rapport $\frac{R_m(\lambda)}{R_1}$ dans le cas non conservatif au moyen de simulations. Nous avons simulé 50 champs multifractals de dimensions 512x512 au moyen des paramètres spatiaux $(\alpha, C_1) = (1.8, 0.07)$ et intégré ces cartes à divers ordres *H*=0.05, 0.1,…0.6 pour obtenir des lots de 50 cartes. Nous avons calculé le rapport entre le maximum et la moyenne à diverses résolutions, en dégradant le champ depuis la résolution maximale comme s'il était conservatif. Les figures 20-23 montrent pour quatre valeurs de H (0, 0.1, 0.3, 0.5) les tracés log-log obtenus. Il apparaît qu'une tendance linéaire est conservée, on constate néanmoins que plus H augmente, plus la distorsion de la linéarité est importante, ce qui est logique puisque le maximum théorique ne suit plus une loi puissance. Nous définissons, pour le cas non conservatif, la singularité maximale équivalente comme la pente estimée sur la partie linéaire de ces tracés. La figure 24 montre sa variation en fonction de *H*. Il apparaît qu'à mesure que *H* augmente, la singularité maximale équivalente diminue, ce qui s'explique par le biais introduit par les moyennages successifs sur un champ d'autant moins conservatif que *H* est grand.

Nous avons alors tracé (Fig. 25) le rapport maximum sur moyenne pour le lot des 30 cartes AMMA 64x64 non intermittentes étudiées précédemment. Nous observons que le tracé suit une tendance linéaire, quoique de façon quelque peu distordue, ce qui est du à la valeur de *H* assez élevée. La pente donne une singularité maximale équivalente de 0.38, ce qui reste assez cohérent par rapport aux simulations précédentes effectuées avec les mêmes paramètres puisque la Fig. 24 indique une valeur de 0.31 pour *H*=0.4.
En pratique, cette valeur présente un grand intérêt puisqu'elle permet de prédire le maximum à des échelles plus petites que celles accessibles à la mesure par radar, étant donné que la singularité du maximum ne dépend pas de l'échelle. Il convient néanmoins de garder à l'esprit qu'il s'agit en toute rigueur non pas d'un maximum, mais d'une valeur presque jamais dépassée, au sens des probabilités.

Par exemple, la valeur $\gamma_s = 0.38$ estimée précédemment implique qu'en doublant la résolution, on multipliera le maximum observé par au moins $2^{\gamma_s} \approx 1.30$, soit une augmentation de 30% de l'intensité.

Fig.20- Rapport maximum sur moyenne en fonction de la résolution (cartes simulées avec *H*=0)

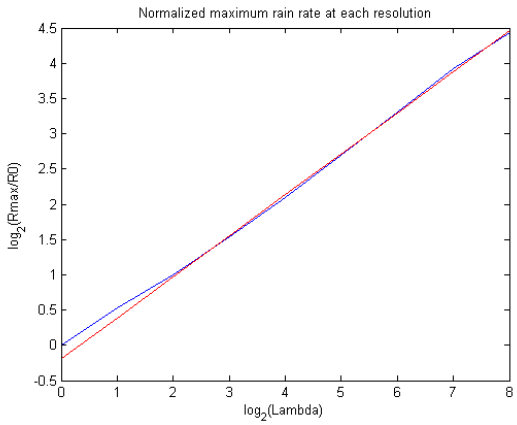


Fig.21- Rapport maximum sur moyenne en fonction de la résolution (simulation *H*=0.1)

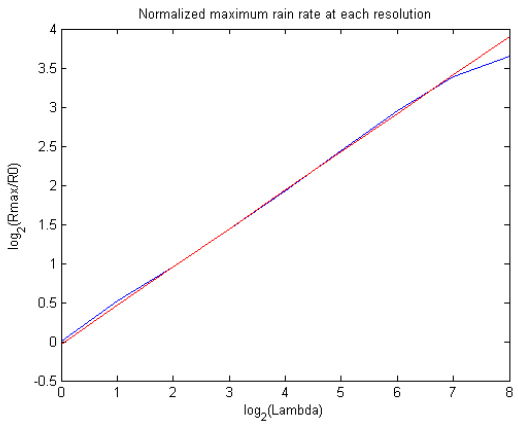


Fig.22- Rapport maximum sur moyenne en fonction de la résolution (simulation *H*=0.3)

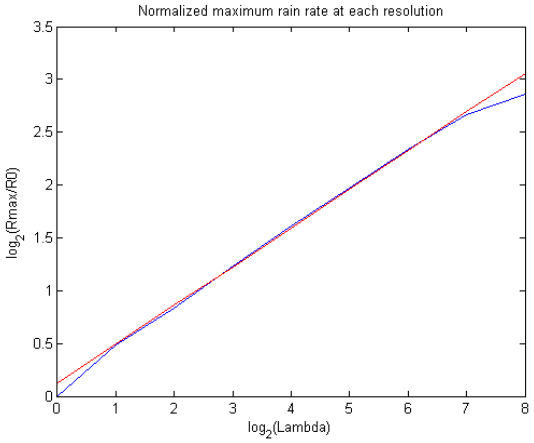


Fig.23- Rapport maximum sur moyenne en fonction de la résolution (simulation *H*=0.5)

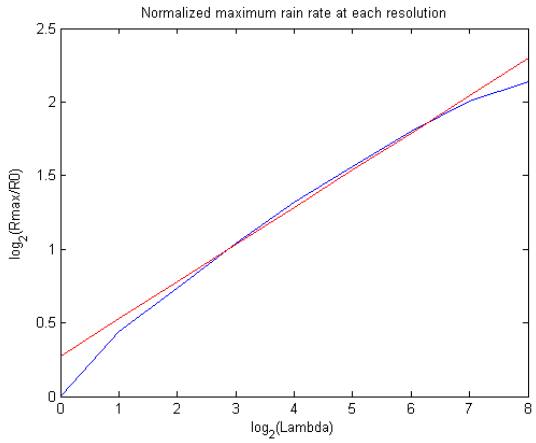


Fig. 24- Estimation de la pente des graphes maximum sur moyenne (simulation)

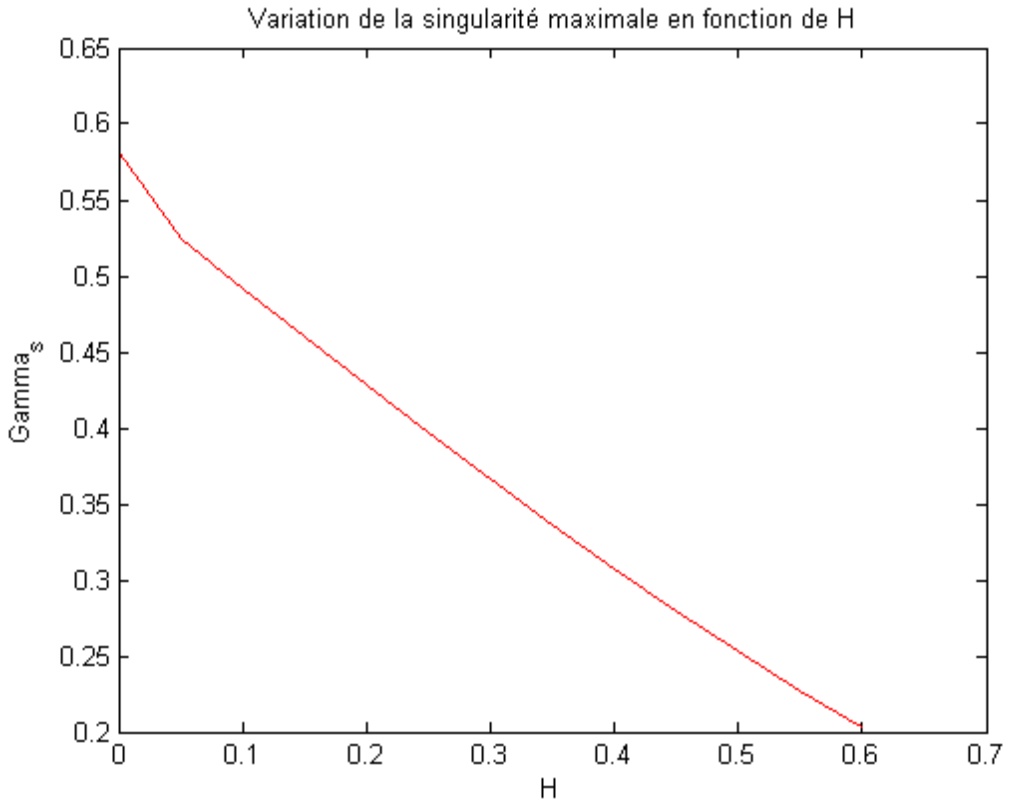
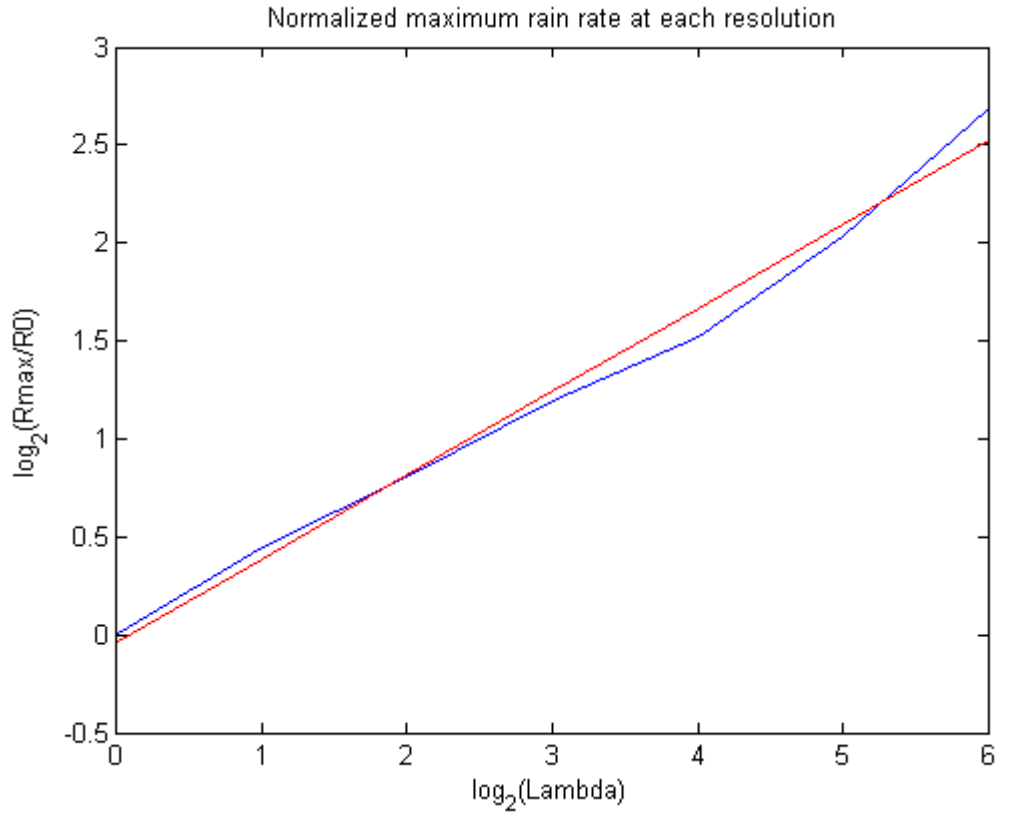


Fig.25- Rapport maximum sur moyenne en fonction de la résolution dans le cas des 30 cartes AMMA 64x64 non intermittentes



6. Conclusion

L'application du formalisme multifractal à des données de pluie non intermittente permet de bien représenter le caractère non stationnaire du phénomène pluvieux. De ce caractère non stationnaire résulte la non convergence vers une forme d'équilibre des fonctions de répartitions des taux précipitants. Cette remarque va à l'encontre des modèles existants qui font une hypothèse de stationnarité. Le modèle multifractal/FIF permet de prendre celle-ci en compte et présente en outre l'avantage, contrairement à la CDF, de pouvoir représenter le phénomène à plusieurs résolutions en dépit de sa non conservativité. De plus, toujours en dépit de cette non conservativité, il existe une invariance d'échelle du maximum permettant la prédiction de celui-ci à partir d'un champ moyen.

Références

1- Schertzer D. and Lovejoy S.: Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, J. Geophys. Res., 92(D8), 9693-9714, 1987

2- de Montera L., L. Barthès, and C. Mallet, Rain Universal multifractal parameters revisited with dual-beam spectropluviometer measurments, Journal of Hydrometeorology, AMS, doi:10.1175/2008JHM1040.1

3- Kolmogorov A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. P. 82–85.

4- Yaglom A.M.: The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval, Sov. Phys. Dokl.,2, 26-30, 1966

5- Mandelbrot B. 1974, Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. J. Fluid Mechanics 62, 331-350

6- Schertzer D., Lovejoy S.:Generalized scale invariance in turbulent phenomena, Physico-Chemical Hydrodynamics Journal, 6, 623-635, 1985

7- Schertzer D., Lovejoy S., Hubert P.: An introduction to stochastic multifractal fields. Mathematical Problems in Environmental Science and Engineering, A. Ern and L Weiping (eds.), Series in Contemporary Applied Mathematics, vol.4, Higher Education Press, Beijing, 2002, p. 106-179

8- Schertzer D., Lovejoy S., Singularités anisotropes, divergence des moments en turbulence. Annales de la Société Mathématique du Québec 11 (1) 139-181

9- Schertzer D., Lovejoy S. : Hard and soft multifractal processes, Physica A, 185, 187-194, 1992

10- Parisi G., Frisch U. : A multifractal model of intermittency, in : Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics, M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi (eds.), pp.84-88, Amsterdam, 1985

11- Schertzer D., Lovejoy S. : Universal multifractals do exist!, Journal of applied meteorology, 36, 1296-1303, 1997

12- Gagnon J.-S., Lovejoy S., Schertzer D.: Multifractal earth topography, Nonlin. Processes Geophys, 13, 541-570, 2006

13- S. Pecknold S. Lovejoy, D. Schertzer, C Hooge, F. Malouin: The simulation of univeral multifractals. Cellular automata: Prospects in astrophysical applications, J.M. Perfdang, A.Lejeune (eds.), World Scientific, pp.228-267, 1993

14- Monin, A.S. & Yaglom, A.M., 1975. Statistical Fluid Mechanics,
MIT press, Boston, MA.

15- Lavallée D., Lovejoy S., Schertzer D. and Ladoy P. : Nonlinear variability of landscapetopography: multifractal analysis and simulation, in: Fractals and Geography, edited by: De Cola L., and Lam N., Prentice Hall, New Jersey, 158-192, 1993

16- Ladoy P., Lovejoy S., Schertzer D.: Extreme fluctuations and intermittency in climatological temperatures and precipitation, Scaling, fractals and non-linear variability in geophysics, D. Schertzer, S. Lovejoy (eds.), 241-250, Kluwer, 1991

17- Tessier Y., Lovejoy S., Schertzer D., and Pecknold S.: Universal multifractal in rain and clouds: theory and observations, J. Appl. Meteor., 32, 223-250, 1993

18- De Lima M., Grasman J.: Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi arid region in Portugal, J. Hydr. 220, pp. 1-11, 1999

19- De Lima M. et al., Low rain rates, spurious scale breaks and the rain depth analysis technique, Wat. Res. Research

20- Deidda R.: Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework, Wat. resour. Res. 36, 1779-1794, 2000

21- Biaou, Angelbert Chabi (2004) De la méso-échelle à la micro-échelle: Désagrégation spatio-temporelle multifractale des précipitations. Doctorat Hydrologie et Hydrogéologie Quantitatives, CIG-Centre d'informatique géologique

22- Macor, Jose Luis (2007) Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites. Doctorat, ENPC

23- S. Lovejoy, D. Schertzer, V. Allaire: The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation**,** Atmos. Res**.** doi 10.1016/ j.atmosres.2008.02.016, 2008

24- S. Lovejoy, D. Schertzer, 1995: Multifractals and Rain. New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological modelling, Ed. A. W. Kundzewicz, 62-103, Cambridge press, 1995

25- M. Lilley et al.: Multifractal large number of drops limit in rain, J. Hydrol. Doi:10.1016/j.jhydrol.2005.11.063, 2006

26- M. Douglas, P. Barros, Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Application in the eastern United States, J. Hydrometeorol. 4 (2003) 1012–1024

27- J.-F. Royer et al., C. R. Geoscience 340 (2008)

28 – ITU rain rate digital maps, ITU-R P.837