Journées scientifiques du CNFRS/URSI
"MÉTROLOGIE ET CAPTEURS EN ÉLECTROMAGNÉTISME"
Meudon, 29 et 30 mars 2004

La droite de Williamson : une technique de régression linéaire injustement oubliée

F. Auger$^{*}_{cad}$, X. Chapeleau$^{**}_{fd}$, D. Leduc$^{**}_{fd}$
[*] GE44, CRTT, Bd de l'Université, 44602 Saint Nazaire cedex.
francois.auger@ge44.univ-nantes.fr

[**] Laboratoire de Physique des Isolants et d'Optronique,
2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes Cedex 3.
{dominique.leduc,xavier.chapeleau}@physique.univ-nantes.fr

Résumé

L'objectif de cet article est de rappeler l'existence de la méthode de régression linéaire de Williamson, qui est la seule à prendre en compte des incertitudes sur les deux coordonnées des points de mesure. Le principe de cette méthode est d'abord rappelé, et des expressions analytiques exactes des coefficients de la droite de régression sont présentés (alors que ces coefficients sont obtenus par une méthode itérative d'optimisation numérique dans le papier original). L'expression de la variance de l'erreur d'estimation de chaque coefficient est également donnée. Cette technique est enfin employée sur des données réelles, pour mesurer la dispersion chromatique d'une fibre optique à l'aide d'un interférogramme.

mots clés : régression linéaire, droite des moindres carrés, interférogramme, dispersion chromatique, fibres optiques.

1 Présentation du travail réalisé

Il est très fréquent en physique expérimentale que deux grandeurs mesurées (et donc entachées toutes les deux d'une certaine erreur de mesure) soient théoriquement liées par une relation linéaire. Les coefficients de cette droite sont alors trop souvent obtenus par la méthode de régression classique, qui supose que seule une des coordonnées, l'ordonnée, est entachée d'un bruit de mesure. En 1968, J.H. Williamson [1] a formulé correctement ce problème d'estimation, et proposé une solution. Une rédaction trop dense et par endroits imprécise de cet article n'a semble t-il malheureusement pas permis une large diffusion de cette approche, qui répond pourtant indiscutablement à des besoins réels. L'objectif de cet article est de rappeler le principe de la méthode de régression de Williamson. Des expressions analytiques exactes des coefficients de la droite de régression sont présentées, ainsi qu'une évaluation des variances des erreurs d'estimation de ces coefficients.

2 Structure de l'article

Dans une première partie, on rappellera les résultats de la régression linéaire classique [2, 3, 4], qui suppose qu'une seule des coordonnées est entachée d'un bruit de mesure. Puis on présente la formulation du problème de la régression linéaire de N points dont les deux coordonnées sont mesurées [1] : si X_i et Y_i sont des mesures de deux grandeurs physiques de valeurs “vraies” $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{Y}_i$, (telles que $\mathcal{Y}_i = a\,\mathcal{X}_i + b$) avec des incertitudes respectives $u(x)$ et $u(y)$, alors le problème de la régression linéaire consiste à trouver les valeurs de a, de b et de tous les $\mathcal{X}_i$ qui minimisent le critère de maximum de vraisemblance :

$$J(a, b, \mathcal{X}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(Y_i - a\,\mathcal{X}_i - b)^2}{u(y)^2} + \frac{(X_i - \mathcal{X}_i)^2}{u(x)^2}$$

La minimisation préalable de ce critère par rapport aux $\mathcal{X}_i$ fournit une estimation de ces valeurs “vraies”, et un nouveau critère qui ne dépend que des coefficients a et b de la droite de régression [5] :

$$J(a, b) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(Y_i - a\,X_i - b)^2}{a^2\,u(x)^2 + u(y)^2}$$

Bien que non-quadratique, la minimisation de ce critère par rapport à a et à b peut être effectuée analytiquement. Après plusieurs calculs fastidieux, on montre que a est solution d’un polynôme du second degré,

$$u(x)^2\,a^2 + \frac{u(y)^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - u(x)^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2}{\sum_{i=1}^{N} x_i\,y_i}\,a - u(y)^2 = 0,$$

$$\text{avec} \quad x_i = X_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \quad \text{et} \quad y_i = Y_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j$$

et que b s’obtient de la même manière que dans la régression linéaire classique. À notre connaissance, ces résultats sont originaux. On vérifie bien évidemment que lorsque $u(x) = 0$, on retrouve les expressions de la régression linéaire classique. Des expressions des variances d’erreur d’estimation des coefficients sont également données.

Dans une troisième partie, on présente une application de cette méthode à un problème réel d’estimation de la dispersion chromatique d’une fibre optique, à l’aide de l’interférogramme fourni par un interféromètre de Michelson fibré [6]. Les différences entre les résultats obtenus par la régression linéaire classique et la méthode de Williamson sont présentés, et l’intérêt de la prise en compte des deux incertitudes $u(x)$ et $u(y)$ dans le calcul des coefficients de la droite et de leur incertitude est mis en évidence dans cet exemple.

Références

[1] J.H. Williamson, “Least-squares fitting of a straight line,” Canadian Journal of Physics, vol 46, pp 1845–1847, 1968.

[2] “Métrologie : gérer et maîtriser les équipements de mesure,” AFNOR 1997.

[3] EURACHEM / CITAC Guide, ”Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement, Second Edition”, ISBN 0 948926 15 5, 2000.

[4] K. Protassov, “Probabilités et incertitudes dans l’analyse des données expérimentales,” Presses Universitaires de Grenoble, 1999.

[5] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, “Numerical Recipes in C++, The Art of Scientific Computing (second edition),” Cambridge University Press, 2002.

[6] D. Leduc, X. Chapeleau, C. Lupi, R. Le Ny, C. Boisrobert, “Accurate low-coherence interferometric relative group delay and reflectance measurements ; characterization of a free-space optics multiplexer/demultiplexer”, Journal of Optics A : Pure and Applied Optics, Vol 5, No 5, pp. S124-S128, septembre 2003.